

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΔΕΥΤΕΡΑ 7 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Θέμα 1. [20] Έστω \mathcal{V} και \mathcal{U} δύο υπόχωροι του $\mathbb{R}_8[t]$ για τους οποίους ισχύει ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 5$ και $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = 7$. Να βρεθούν οι πιθανές τιμές για τη διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$, και για κάθε πιθανή τιμή της διάστασης $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U})$, να δοθεί παράδειγμα τέτοιων υπόχωρων \mathcal{V} και \mathcal{U} . Για ποιές τιμές της διάστασης $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U})$ ισχύει ότι: (α) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$; (β) $\mathcal{V} + \mathcal{W} \neq \mathbb{R}_8[t]$ και $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{U}$; Είναι το άθροισμα $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ των υπόχωρων \mathcal{V} και \mathcal{U} ευθύ;

Θέμα 2. [20] Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και $n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί η ορίζουσα του $2n \times 2n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Θέμα 3. [30] Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x + y + z = -6\kappa \\ \lambda x + 3y + 2z = 3\kappa \\ 2x + y + (\lambda+1)z = 4 \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ για τις οποίες το (Σ) είναι σύστημα Cramer.
2. Αν $\lambda = 4$, να δειχθεί ότι ο πίνακας A των συντελεστών του (Σ) είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφος του A με την εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του.
3. Να βρεθεί η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα του (Σ) .
4. Για τις τιμές των κ, λ για τις οποίες το (Σ) δεν είναι σύστημα Cramer, να βρεθούν όλες οι λύσεις του (Σ) .

Θέμα 4. [25] Θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{V} = \langle \mathcal{C} \rangle$ του \mathbb{R}^5 ο οποίος παράγεται από το σύνολο διανυσμάτων

$$\mathcal{C} = \{ \vec{x}_1 = (0, 0, 1, 1, 1), \vec{x}_2 = (0, 1, 1, 0, 1), \vec{x}_3 = (1, 1, 0, 0, -1) \}$$

και τον υπόχωρο $\mathcal{U} = \langle \mathcal{D} \rangle$ του \mathbb{R}^5 ο οποίος παράγεται από το σύνολο διανυσμάτων:

$$\mathcal{D} = \{ \vec{y}_1 = (1, 0, 1, 0, 1), \vec{y}_2 = (1, 2, 1, 2, -1), \vec{y}_3 = (0, 2, 1, 1, 0) \}$$

1. Να βρεθεί: (α) βάση για κάθε έναν από τους υπόχωρους \mathcal{V} , \mathcal{U} , και $\mathcal{V} + \mathcal{U}$, και (β) η διάσταση του $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$.
2. Να βρεθεί υπόχωρος \mathcal{Z} του \mathbb{R}^5 έτσι ώστε: $\mathbb{R}^5 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z}$.
3. Είναι οι \mathbb{R} -διανυσματικοί χώροι \mathcal{V} και $\mathbb{R}_n[t]$, για κατάλληλο $n \geq 1$, ισόμορφοι; Αν είναι ισόμορφοι, να προσδιορίσετε έναν ισομορφισμό $\mathbb{R}_n[t] \rightarrow \mathcal{V}$.
4. Είναι οι \mathbb{R} -διανυσματικοί χώροι \mathcal{U} και $M_n(\mathbb{R})$, για κατάλληλο $n \geq 1$, ισόμορφοι; Αν είναι ισόμορφοι, να προσδιορίσετε έναν ισομορφισμό $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{U}$.

Θέμα 5. [25] Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z, w) = (x - y + 5z + 2w, 2x + y + 4z + 2w, x + 5y - 7z - 2w)$$

1. Να βρεθεί ο πίνακας $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f ως προς τις κανονικές βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{C} των \mathbb{R}^4 και \mathbb{R}^3 αντίστοιχα.
2. Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\text{Ker}(f)$ της f η οποία να επεκταθεί σε μια βάση \mathcal{B}' του \mathbb{R}^4 .
3. Να βρεθεί μια βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$ της f η οποία να επεκταθεί σε μια βάση \mathcal{C}' του \mathbb{R}^3 .
4. Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{B}' }^{\mathcal{C}' } (f)$ της f ως προς τις βάσεις \mathcal{B}' και \mathcal{C}' των \mathbb{R}^4 και \mathbb{R}^3 αντίστοιχα.
5. Ποιά είναι η σχέση των πινάκων A και B ;

— Να γραφούν τα Θέματα 3, 4, 5, και ένα από τα Θέματα 1 και 2.